und die Gleichungen

$$\alpha = \frac{7\alpha + 14}{16} + \frac{\beta}{2} + 1, \qquad \beta = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha + 2}{2} + 1,$$

daraus $\alpha = 54/5$, $\beta = 42/5$, und schließlich für die mittlere Spieldauer m

$$m = \frac{m_0 + m_1}{2} + 1 = 12.$$

Obiger Prozeß relevanter Spielzustände kann als (sehr) vereinfachter Prototyp einer wichtigen Klasse von zufälligen Prozessen betrachtet werden. Eine nachträgliche Analyse zeigt, daß wir bei unseren Berechnungen vor allem zwei Eigenschaften verwendet haben:

- Die Zustandsänderungen erfolgen unabhängig von vergangenen Zustandsänderungen
- Die Wahrscheinlichkeiten für die Zustandsänderungen hängen nicht von dem Zeitpunkt ab, zu dem sie erfolgen.

Prozesse dieser Art wollen wir im weiteren genauer studieren.

1.2 Markoffketten

Definition. Sei X eine höchstens abzählbare Menge von Zuständen. Ein zufälliger Prozeß $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_n, \ldots)$ mit Werten in X heißt *Markoffkette* (in diskreter Zeit), wenn die Markoffeigenschaft („Gedächtnislosigkeitseigenschaft“)

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} = j | \xi_0, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n = i) = \mathbb{P}(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i)$$

für alle n erfüllt ist. Die Größe

$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i) := p_{ij}(n, n+1)$$

nennt man die Übergangswahrscheinlichkeit von i nach j zum Zeitpunkt n. Gilt $p_{ij}(n, n+1) = p_{ij}$ für alle n, (i.e. hängen die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht von n ab), so heißt ξ eine Markoffkette (in diskreter Zeit) *mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten.* Die Zahlen p_{ij} heißen dann (einstufige) *Übergangswahrscheinlichkeiten*, die Matrix

$$P = [p_{ij}]_{i,j \in X}$$

(einstufige) *Übergangsmatrix.*

Im folgenden werden wir nur Markoffketten mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten betrachten.

Bemerkung. Es gibt viele zur Markoffeigenschaft äquivalente (beziehungsweise aus ihr deduzierbare) Beziehungen. Die wahrscheinlich instruktivste dürfte die folgende sein:

> Sei A ein Ereignis, das nur von $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ abhängt, also in der Vergangenheit des Zeitpunktes n liegt, und sei B ein Ereignis, das nur von $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots$ abhängt, also in der Zukunft des Zeitpunktes n liegt. Dann gilt
>
> $$\mathbb{P}(A \cap B | \xi_n = i) = \mathbb{P}(A | \xi_n = i)\ \mathbb{P}(B | \xi_n = i).$$
>
> *Zukunft und Vergangenheit sind bedingt unabhängig, gegeben die Gegenwart.*

Bemerkung. Offensichtlich gilt

$$p_{ij} \geq 0, \qquad \sum_{j \in X} p_{ij} = 1.$$

Die Übergangsmatrix P ist daher eine quadratische Matrix mit nichtnegativen Elementen, bei der alle Zeilensummen eins sind. Solche Matrizen bezeichnet man auch als *stochastische Matrizen.*

1.3 Beispiele

Beispiel 1: Eindimensionale Irrfahrt

Die eindimensionale (diskrete) Irrfahrt ist eine Markoffkette mit Zustandsraum $X = \mathbb{Z}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{i,i+1} = p, \quad p_{i,i-1} = q = 1 - p; \qquad p_{ij} = 0, \quad j \notin \{i-1, i+1\}.$$

(Man skizziere den Übergangsgraphen). Beachte: in diesem Fall gilt

$$\xi_n = \xi_0 + \eta_1 + \cdots + \eta_n,$$

wobei $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ unabhängig, identisch verteilt mit $\mathbb{P}(\eta = 1) = p$ und $\mathbb{P}(\eta = -1) = q$ sind.

Beispiel 2: Ein einfaches diskretes Warteschlangenmodell

Zu den Zeitpunkten $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$ wird genau ein Kunde aus einer Warteschlange bedient, sofern diese nicht leer ist. η_n sei die Anzahl der Kunden, die im Zeitintervall (t_{n-1}, t_n) in der Warteschlange neu eintreffen, und ξ_n die Anzahl der zum Zeitpunkt t_n wartenden Kunden. Dann gilt offensichtlich

$$\xi_n = \begin{cases} \xi_{n-1} - 1 + \eta_n, & \text{wenn } \xi_{n-1} > 0, \\ \eta_n, & \text{wenn } \xi_{n-1} = 0, \end{cases}$$

oder, unter Verwendung der Bezeichnung $x^+ = \max(x, 0)$,

$$\xi_n = (\xi_{n-1} - 1)^+ + \eta_n.$$

Sind die η_n unabhängig, so ist ξ eine Markoffkette mit Zustandsraum $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_n = j | \xi_{n-1} = i) &= \mathbb{P}((\xi_{n-1} - 1)^+ + \eta_n = j | \xi_{n-1} = i) \\
&= \mathbb{P}(\eta_n = j - (i-1)^+).
\end{aligned}$$

Wenn wir daher zu Abkürzung $\mathbb{P}(\eta = k) = \alpha_k$ schreiben, so erhalten wir als Übergangsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \\ & & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots \\ & & & \alpha_0 & \ldots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Beispiel 3: Ein einfaches Lagerhaltungsmodell

Zu den Zeitpunkten $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$ wird der Lagerbestand an einem Gut kontrolliert und nach folgender Regel adaptiert: ist der zum Zeitpunkt t_{n-1} verfügbare Bestand ξ_{n-1} geringer als l, so werden im n-ten Intervall (t_{n-1}, t_n) genau $u - \xi_{n-1}$ Einheiten produziert (oder zugekauft); ist der Bestand aber zwischen l und u, so wird nichts produziert. (u ist die Kapazitätsobergrenze des Lagers.) Ist dann η_n die Anzahl der im Intervall (t_{n-1}, t_n) eintreffenden Bestellungen, so gilt für den zum Zeitpunkt n noch verfügbaren Bestand ξ_n, daß

$$\xi_n = \begin{cases} \xi_{n-1} - \eta_n, & \text{wenn } l < \xi_{n-1} \leq u, \\ u - \eta_n, & \text{wenn } \xi_{n-1} \leq l. \end{cases}$$

Sind $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt, so ist ξ eine Markoffkette mit Zustandsraum

$$X = \{u, u-1, \ldots, l, l-1, \ldots, 0, -1, -2, \ldots\}.$$

und entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten.

Bemerkung. Allgemeiner gilt: ist $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots)$ eine Folge von unabhängig, identisch verteilten Zufallsgrößen und ξ beschreibbar durch ein Modell der Form $\xi_n = F(\xi_{n-1}, \eta_n)$ (und ξ_0 unabhängig von η), so ist ξ eine Markoffkette.

Beispiel 4: Ein Modell für Erfolgsläufe

Wir betrachten eine Anordung von verschiedenen Experimenten $E_1, \ldots, E_k, \ldots$, bei der das k-te Experiment nur dann durchgeführt werden kann, wenn alle vorangegangenen Experimente, also das erste bis zum $k-1$-ten, erfolgreich waren (man könnte sich eine Folge von Prüfungen vorstellen, die nur in einer bestimmten Reihenfolge abgelegt werden können). Beim ersten Mißerfolg muß wieder mit dem ersten Experiment begonnen werden. Die Erfolgswahrscheinlichkeit im k-ten Experiment sei p_k, die entsprechende Gegenwahrscheinlichkeit q_k. Sind die jeweiligen Experimente voneinander unabhängig und ist ξ_n die Anzahl der bis zum Zeitpunkt n erfolgreich *hintereinander* ausgeführten Experimente, also e.g. die Anzahl der hintereinander erfolgreich abgelegten Prüfungen, (ξ_n ist die Länge des aktuellen „Erfolgslaufs“), so ist ξ eine Markoffkette mit Zustandsraum $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{i,i+1} = p_{i+1}, \quad p_{i,0} = q_{i+1}; \qquad p_{i,j} = 0, \quad j \notin \{0, i+1\}.$$

Die Übergangsmatrix P ist also von der Form

$$P = \begin{bmatrix} q_1 & p_1 & & & \\ q_2 & & p_2 & & \\ q_3 & & & p_3 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

(Ist nur eine endliche Anzahl N von Prüfungen zu bestehen, so kann man ξ als Markoffkette mit dem endlichen Zustandsraum

$$X = \{0, 1, 2, \ldots, N-1, \Delta\}$$

auffassen, wobei der Zustand Δ (der „Friedhof“) erreicht und nicht mehr verlassen wird, wenn alle Prüfungen erfolgreich hintereinander abgelegt wurden.)

Im weiteren wollen wir die folgenden, offensichtlich grundlegenden Fragestellungen näher untersuchen.

- Was ist die Verteilung von ξ_n? Existiert eine Grenzverteilung/Gleichgewichtslage? (e.g. im Warteschlangenmodell: wie ist die Anzahl der zum Zeitpunkt n in der Warteschlange befindlichen Kunden verteilt? Wird die Warteschlange unendlich lang oder etabliert sich ein Gleichgewicht von neu eintreffenden und bedienten Kunden?)

- Wenn wir die Markoffkette ξ von einem Zustand i aus starten, kommen wir wieder in den Anfangszustand zurück? Mit welcher Wahrscheinlichkeit? Mit welcher Rate? Wie lang müssen wir im Mittel auf solch eine Rückkehr warten? (e.g. wird die Warteschlange je wieder leer? Wenn ja, wie oft geschieht das? etc.)

1.4 Chapman-Kolmogorov Gleichungen

Definition. Wir nennen

$$p_{ij}(n) := \mathbb{P}(\xi_{t+n} = j | \xi_t = i), \qquad t = 0, 1, \ldots$$

die *n-stufige Übergangswahrscheinlichkeit* von i nach j. Die Matrix

$$P(n) = [p_{ij}(n)]_{i,j \in X}$$

heißt *n-stufige Übergangsmatrix.*

Nun gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} p_{ij}(n+m) &= \mathbb{P}(\xi_{n+m} = j | \xi_0 = i) \\ &= \sum_{k \in X} \mathbb{P}(\xi_{n+m} = j, \xi_m = k \,|\, \xi_0 = i) \\ &= \sum_{k \in X} \underbrace{\mathbb{P}(\xi_{n+m} = j | \xi_0 = i, \xi_m = k)}_{p_{kj}(n)} \underbrace{\mathbb{P}(\xi_m = k | \xi_0 = i)}_{p_{ik}(m)}. \end{aligned}$$

Somit genügen die mehrstufigen Übergangswahrscheinlichkeiten den *Chapman-Kolmogorov Gleichungen*

$$p_{ij}(n+m) = \sum_{k \in X} p_{ik}(m) p_{kj}(n).$$

Für die mehrstufigen Übergangsmatrizen gilt dann

$$P(n+m) = P(m)P(n)$$

und daher, da $P(1) = P$,

$$P(n) = P^n = \underbrace{P \cdots P}_{n \text{ mal}}.$$

Wir vereinbaren folgende Schreibweise: ist A ein Ereignis bezüglich des Prozesses ξ, so sei

$$P_i(A) := \mathbb{P}(A | \xi_0 = i);$$

ist $\eta = f(\xi_0, \ldots, \xi_n, \ldots)$ eine integrierbare Funktion des Prozesses ξ, so bezeichne

$$E_i \eta := \mathbb{E}(\eta | \xi_0 = i).$$

(Offensichtlich ist dann $P_i(A) = E_i \mathbf{1}_A$.)

Folgerungen aus den Chapman-Kolmogorov Gleichungen

Ist $\mu = [\mu_i]'_{i\in X}$ die Startverteilung der Markoffkette ξ, i.e. gilt $\mathbb{P}(\xi_0 = i) = \mu_i$, und schreiben wir μ_n für den Vektor

$$[\mathbb{P}(\xi_n = j)]'_{j\in X}\,,$$

dann gilt $\mathbb{P}(\xi_n = j) = \sum_k \mathbb{P}(\xi_0 = k)p_{kj}(n)$ und somit

$$\mu_n = P(n)'\mu = (P^n)'\mu.$$

Ist $f = [f_i]'_{i\in X}$ eine Funktion auf dem Zustandsraum X und schreiben wir f_n für den Vektor

$$[E_i f(\xi_n)]'_{i\in X}$$

dann folgt wegen $E_i f(\xi_n) = \sum_k p_{ik}(n)f(k)$, daß

$$f_n = P(n)f = P^n f.$$

Insbesondere ist

$$\mathbb{E}\, f(\xi_n) = \mu' P^n f.$$

1.5 Rekurrenz und Transienz

Im folgenden Abschnitt untersuchen wir die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit beziehungsweise wie oft Zustände „besucht" werden. Unter einem *Besuch* in einem Zustand j ist hier ein Sprung *in* den Zustand j *hinein* zu verstehen. Dazu vereinbaren wir folgende Bezeichnungen.

$$\begin{aligned}
\tau_j &= \min\{n > 0 : \xi_n = j\}.\\
f_{ij}(n) &= P_i(\xi_1 \neq j, \ldots, \xi_{n-1} \neq j, \xi_n = j) = P_i(\tau_j = n),\\
f_{ij} &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}(n) = P_i(\tau_j < \infty) = \mathbb{P}(\xi \text{ besucht } j \text{ nach Start in } i).\\
\nu_j &= \#\{n > 0 : \xi_n = j\}.
\end{aligned}$$

Somit ist $\nu_j = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_j(\xi_n)$ die Anzahl der Besuche der Markoffkette ξ in j. (Hier ist $\delta_j(x) = \delta_{x,j} = 1$, wenn $x = j$, und sonst null.) Wegen

$$E_i\delta_j(\xi_n) = P_i(\xi_n = j) = p_{ij}(n)$$

folgt für $n_{ij} = E_i\nu_j$, die mittlere Anzahl der Besuche in j bei Start in i, daß

$$n_{ij} = E_i\nu_j = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n).$$

Die einzelnen $f_{ij}(n)$ kann man relativ einfach rekursiv berechnen. Offensichtlich gilt $f_{ij}(0) = 0$ und $f_{ij}(1) = p_{ij}$. Nun ist für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= \sum_{t=1}^{n} P_i(\tau_j = t, \xi_n = j) \\ &= \sum_{t=1}^{n} \underbrace{P_i(\tau_j = t)}_{f_{ij}(t)} \underbrace{\mathbb{P}(\xi_n = j | \xi_0 = i, \xi_1 \neq j, \dots, \xi_{t-1} \neq j, \xi_t = j)}_{p_{jj}(n-t)}, \end{aligned}$$

also

$$p_{ij}(n) = \sum_{t=0}^{n} f_{ij}(t) p_{jj}(n-t), \qquad n \geq 1,$$

beziehungsweise

$$f_{ij}(n) = p_{ij}(n) - \sum_{t=1}^{n-1} f_{ij}(t) p_{jj}(n-t), \qquad n \geq 1.$$

Definiert man daher *erzeugende Funktionen*

$$P_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}(n) z^n, \qquad F_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}(n) z^n,$$

so gilt $F_{ij}(1) = f_{ij}$, $P_{ij}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}(n) = \delta_{ij} + E_i \nu_j$ und aus obiger Beziehung erhält man leicht, daß

$$P_{ij}(z) = \delta_{ij} + F_{ij}(z) P_{jj}(z),$$

also

$$F_{ij}(z) = \frac{P_{ij}(z) - \delta_{ij}}{P_{jj}(z)},$$

woraus man die einzelnen $f_{ij}(n)$ manchmal durch Reihenentwicklung verhältnismäßig einfach bestimmen kann (siehe Übungen).

Als nächstes wollen wir die Verteilung von ν_j berechnen. Offensichtlich gilt

$$P_i(\nu_j = 0) = P_i(\tau_j = \infty) = 1 - f_{ij}.$$

Schreiben wir allgemeiner $\nu_j(t) = \#\{n > t : \xi_n = j\}$ für die Anzahl der Besuche in j nach dem Zeitpunkt t, so ist für $n \geq 1$ aufgrund der Markoffeigenschaft

$$P_i(\nu_j = n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{t=1}^{\infty} P_i(\nu_j = n, \tau_j = t) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} P_i(\tau_j = t)\ \mathbb{P}(\nu_j(t) = n-1 | \xi_0 = i, \xi_1 \neq j, \ldots, \xi_{t-1} \neq j, \xi_t = j) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} f_{ij}(t)\ \mathbb{P}(\nu_j(t) = n-1 | \xi_t = j) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} f_{ij}(t)\ P_j(\nu_j = n-1) \\
&= f_{ij} P_j(\nu_j = n-1)
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
P_i(\nu_j = n) &= f_{ij} P_j(\nu_j = n-1) \\
&= f_{ij} f_{jj} P_j(\nu_j = n-2) \\
&= \qquad \vdots \\
&= f_{ij} f_{jj}^{n-1} P_j(\nu_j = 0) \\
&= f_{ij} f_{jj}^{n-1} (1 - f_{jj}).
\end{aligned}
$$

Zusammenfassend erhalten wir also

Satz. *Es gilt*

$$
P_i(\nu_j = 0) = 1 - f_{ij}, \qquad P_i(\nu_j = n) = f_{ij} f_{jj}^{n-1}(1 - f_{jj}), \quad n \geq 1.
$$

Definition. Der Zustand i heißt *rekurrent*: $\Longleftrightarrow f_{ii} = 1$, sonst *transient.*

Satz. *Es gilt*

$$
\begin{aligned}
&i \text{ rekurrent} \iff P_i(\nu_i = \infty) = 1 \iff E_i \nu_i = \infty \\
&i \text{ transient} \iff P_i(\nu_i < \infty) = 1 \iff E_i \nu_i < \infty.
\end{aligned}
$$

Beweis. Da $P_i(\nu_i = n) = f_{ii}^n(1 - f_{ii})$, gilt $P_i(\nu_i = n) = 0$ für alle n, i.e. $P_i(\nu_i = \infty) = 1$, genau dann, wenn $f_{ii} = 1$, also wenn i rekurrent ist. In diesem Fall ist dann trivialerweise auch $E_i \nu_i = \infty$. Ist i dagegen transient, so folgt $P_i(\nu_i = \infty) = 0$, und man berechnet leicht (siehe Übungen), daß $E_i \nu_i = f_{ii}/(1 - f_{ii}) < \infty$.

Bemerkung. Wir wissen bereits, daß $n_{ii} = E_i \nu_i = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)$. Somit gilt: i ist rekurrent $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$.

Definition. *i führt nach j*, symbolisch $i \to j$, wenn $p_{ij}(n) > 0$ für ein $n \geq 0$. i und j *kommunizieren*, symbolisch $i \leftrightarrow j$, wenn $i \to j$ und $j \to i$. Man zeigt leicht, daß

„kommunizieren“ eine Äquivalenzrelation ist; somit können wir den Zustandsraum X in Äquivalenzklassen zerlegen.

Satz. *Rekurrenz ist eine Klasseneigenschaft.*

Beweis. Sei i rekurrent und j ein Zustand, der mit i kommuniziert. Dann existieren s und t sodaß $p_{ij}(s) > 0$ und $p_{ji}(t) > 0$. Nun gilt offensichtlich $p_{jj}(s+n+t) \geq p_{ji}(t)p_{ii}(n)p_{ij}(s)$, und daher impliziert $n_{ii} = \sum p_{ii}(n) = \infty$, daß $n_{jj} = \sum p_{jj}(n) = \infty$. Also ist j rekurrent.

Satz. *Ein rekurrenter Zustand kommuniziert mit jedem Zustand, zu dem er führt. Somit kann ein rekurrenter Zustand niemals zu einem transienten führen.*

Beweis. Offensichtlich gilt

$$P_i(\nu_i \leq n) \geq P_i(\xi_n = j, \nu_i(n) = 0) = p_{ij}(n)(1 - f_{ji}).$$

Ist i rekurrent, so folgt daher für alle n und j, daß $p_{ij}(n)(1 - f_{ji}) = 0$; führt also i nach j, so ergibt sich $f_{ji} = 1$ und daher trivialerweise, daß j nach i führt.

Beispiele.

1. Bei der Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ kommunizieren alle Zustände. Man kann zeigen (siehe Übungen), daß die Zustände genau dann rekurrent sind, wenn $p = q = 1/2$ („symmetrische Irrfahrt“).

2. Im einfachen Warteschlangenmodell kommunizieren alle Zustände und sind genau dann rekurrent, wenn $\mathbb{E}\,\eta \leq 1$.

3. Im Modell für Erfolgsläufe kommunizieren alle Zustände und sind genau dann rekurrent, wenn $\sum_i q_i = \infty$.

1.6 Stationäre Verteilungen und Grenzverteilungen

Im folgenden Abschnitt untersuchen wir die Frage nach der Existenz und möglichen Berechnung von Grenzverteilungen. Angenommen, eine Grenzverteilung π existiert, i.e. $\mu_n \to \pi$ für $n \to \infty$. Lassen wir n in der Beziehung $\mu_{n+1} = P'\mu_n$ gegen unendlich gehen, so erhalten wir $\pi = P'\pi$, oder komponentenweise $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$. Solche Verteilungen, i.e. Lösungen von $\pi = P'\pi$ mit $\pi_i \geq 0$, $\sum_i \pi_i = 1$, nennt man *stationäre Verteilungen.* Durch Iteration gilt dann auch $\pi = P(n)'\pi$, oder komponentenweise $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}(n)$.

Definition. Eine Markoffkette heißt *irreduzibel*, wenn alle Zustände kommunizieren, und *aperiodisch*, wenn für alle i gilt: $\mathrm{ggT}\{n \geq 1 : p_{ii}(n) > 0\} = 1$.

Satz. *In einer irreduziblen, aperiodischen rekurrenten Markoffkette gilt für alle i und j, daß*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \frac{1}{E_j\tau_j}.$$

Offensichtlich ist $E_j\tau_j = \sum_{j=0}^{\infty} nP_j(\tau_j = n) = \sum_{n=0}^{\infty} nf_{jj}(n)$ die erwartete Zeit, die benötigt wird, um von j ausgehend nach j zurückzukehren. Man nennt $E_j\tau_j$ daher die *mittlere Rekurrenzzeit* von j.

Definition. Der rekurrente Zustand i heißt *positiv rekurrent* $\Longleftrightarrow E_i\tau_i < \infty$, i.e. wenn die mittlere Rekurrenzzeit endlich ist, andernfalls *nullrekurrent.*

Man kann zeigen, daß „positiv rekurrent" und „nullrekurrent" Klasseneigenschaften sind. Mit Hilfe des obigen Satzes und der vorangegangenen Überlegungen erhalten wir nun folgendes Resultat.

Satz. *Sei ξ eine irreduzible, aperiodische, rekurrente Markoffkette.*

A. Ist ξ positiv rekurrent, so existiert eine eindeutig bestimmte stationäre Verteilung π mit $\pi_i = 1/E_i\tau_i$, i.e. π_i ist der Kehrwert der mittleren Rekurrenzzeit von i, und diese ist auch Grenzverteilung.

B. Ist ξ nullrekurrent, so gibt es keine stationäre Verteilung und daher auch keine Grenzverteilung.

Beispiele.

1. Die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ ist periodisch mit Periode 2 und irreduzibel. Man kann zeigen (siehe Übungen), daß die symmetrische Irrfahrt (i.e. $p = q = 1/2$) nullrekurrent ist.

2. Für das diskrete Warteschlangenmodell gilt:

$$\begin{array}{lcl} \sum ka_k = \mathbb{E}\,\eta < 1 & \Longleftrightarrow & \text{positiv rekurrent} \\ \sum ka_k = \mathbb{E}\,\eta = 1 & \Longleftrightarrow & \text{nullrekurrent.} \end{array}$$

1.7 Verzweigungsprozesse

Wir betrachten ein Partikelsystem, bei dem die Partikel der $(n+1)$-ten Generation allein durch „Verzweigungen" der Partikel der n-ten Generation entstehen, i.e. von jedem Partikel der n-ten Generation geht eine bestimmte (nichtnegativ ganzzahlige) Anzahl von Verzweigungen zu den direkten „Nachkommen" des Partikels aus. Wir nehmen an, daß die stochastische Struktur des Prozesses folgenden Annahmen genügt.