Kapitel 4

ARMA-Prozesse

Definition 4.1 (ARMA-Prozeß).
Die Zeitreihe $\xi = (\xi_t, t \in \mathbb{Z})$ heißt ein *ARMA(p,q)–Prozeß* (autoregressiver Moving Average–Prozeß), wenn sie stationär ist und für alle t

$$\xi_t - \alpha_1 \xi_{t-1} - \cdots - \alpha_p \xi_{t-p} = \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \beta_q \epsilon_{t-q}$$

gilt, wobei $(\epsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ weißes Rauschen mit Mittel null ist. ξ heißt ein ARMA(p,q)-Prozeß mit Mittel μ, falls $(\xi_t - \mu)$ ein ARMA(p,q)-Prozesß ist.

Unter Verwendung des Lagoperators L können wir obige Beziehung kompakter schreiben als

$$\alpha(L)\xi_t = \beta(L)\epsilon_t,$$

wobei natürlich

$$\alpha(z) = \alpha_0 - \alpha_1 z - \cdots - \alpha_p z^p, \qquad \beta(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_q z^q$$

mit $\alpha_0 = \beta_0 = 1$. Die Polynome $\alpha(z)$ und $\beta(z)$ nennt man das autoregressive bzw. das Moving Average-Polynom der Differenzengleichung $\alpha(L)\xi_t = \beta(L)\epsilon_t$.

Beispiel 4.1 (MA(q)-Prozesse).
Wenn $p = 0$ ist (i.e., $\alpha(z) \equiv 1$), so nennt man ξ einen *Moving Average*–Prozeß der Ordnung q, symbolisch MA(q); die Zeitreihe ξ entsteht eben durch Bildung eines (einseitigen und gewichteten) gleitenden Durchschnitts der Zeitreihe ϵ. Die Zeitreihe aus Beispiel 2.4 (mit $\beta_1 = \theta$) ist daher ein MA(1)–Prozeß. Für MA(q)-Zeitreihen der Form $\xi_t = \beta(L)\epsilon_t$ erhalten wir

$$m_t = \mathbb{E}\,\xi_t = \mathbb{E}\,\epsilon_t + \beta_1\,\mathbb{E}\,\epsilon_{t-1} + \cdots + \beta_q\,\mathbb{E}\,\epsilon_{t-q} = 0$$

und

$$\operatorname{cov}(\xi_{t+h}, \xi_t) = \sum\nolimits_{j,k=0}^{q} \operatorname{cov}(\beta_j \epsilon_{t+h-j}, \beta_k \epsilon_{t-k}) = \sum\nolimits_{j,k=0}^{q} \beta_j \beta_k \delta_{h,j-k} \sigma^2;$$

diese Zeitreihen sind also stets stationär mit Mittel null und Autokovarianzfunktion

$$\gamma_h = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-|h|} \beta_j \beta_{j+|h|}, & \text{wenn } |h| \le q, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 4.2 (AR(1)-Prozesse).
Wenn $q = 0$ ist (i.e., $\beta(z) \equiv 1$), so nennt man ξ einen *autoregressiven* Prozeß der Ordnung p, symbolisch AR(p). Für welche Polynome $\alpha(z)$ die Differenzengleichung $\alpha(L)\xi_t = \epsilon_t$ eine stationäre Lösung besitzt, ist aber zunächst nicht offensichtlich. Zur Illustration betrachten wir den einfachsten (nichttrivialen) Fall mit $\alpha(z) = 1 - \alpha_1 z$, i.e., $p = 1$. abkürzend schreiben wir $\alpha_1 = \rho$.

Ist $|\rho| < 1$, so wissen wir aus den Übungen, daß

$$\xi_t = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \epsilon_{t-k}$$

eine stationäre Lösung der Gleichung $\xi_t - \rho\xi_{t-1} = \epsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$ liefert; ferner wurde gezeigt, daß obige Reihe im Quadratmittel konvergiert und daß

$$\mathbb{E}\,\xi_t = 0, \qquad \operatorname{cov}(\xi_{t+h}, \xi_t) = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\,\rho^{|h|}.$$

Angenommen, es gäbe eine stationäre Lösung der Gleichung $\xi_t = \xi_{t-1} + \epsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$. Dann folgt wegen $\xi_t - \xi_0 = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_t$, daß für alle $t > 0$

$$t\sigma^2 = \operatorname{var}(\xi_t - \xi_0) \le 4\ \operatorname{var}(\xi_t),$$

was offensichtlich unmöglich ist. Ähnlich überlegt man sich, daß es auch im Fall $\rho = -1$ keine stationäre Lösung geben kann.

Ist $|\rho| > 1$, so ist $|\rho^{-1}| < 1$ und

$$\begin{aligned} \xi_t &= \rho^{-1}\xi_{t+1} - \rho^{-1}\epsilon_{t+1} \\ &\ \ \vdots \\ &= \rho^{-k}\xi_{t+k} - \rho^{-1}\epsilon_{t+1} - \rho^{-2}\epsilon_{t+2} - \cdots - \rho^{-k}\epsilon_{t+k}. \end{aligned}$$

Es folgt (vergleiche Übungen), daß

$$\xi_t = -\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} \epsilon_{t+k},$$

wobei die Reihe im Quadratmittel konvergiert. Nun berechnet man leicht, daß

$$\mathbb{E}\,\xi_t = 0, \qquad \operatorname{cov}(\xi_{t+h}, \xi_t) = \frac{\sigma^2}{\rho^2 - 1}\,\rho^{-|h|}.$$

Für allgemeines p gilt folgendes Resultat (ohne Beweis).

Satz 4.1 (Stabilitätsbedingung).
Die Differenzengleichung $\alpha(L)\xi_t = \epsilon_t$ besitzt genau dann eine stationäre Lösung, wenn das Polynom $\alpha(z)$ keine Nullstellen am Einheitskreis besitzt.

Die Stabilitätsbedingung besagt also, daß $\alpha(z) \neq 0$ für alle komplexen z mit $|z| = 1$. Da $z = 1/\alpha_1$ die einzige Nullstelle des Polynoms $\alpha(z) = 1 - \alpha_1 z$ ist, erhalten wir für $p = 1$ die Bedingung $|\alpha_1| \neq 1$, die wir auch schon in obigem Beispiel abgeleitet hatten.

Definition 4.2 (Kausalität)**.**
Ein ARMA(p,q)-Prozeß heißt *kausal* (oder genauer eine kausale Funktion des Prozesses ϵ), wenn es eine quadratsummierbare Folge von Konstanten $(\phi_j, j = 0, 1, \ldots)$ gibt, sodaß für alle $t \in \mathbb{Z}$

$$\xi_t = \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \phi_j \epsilon_{t-j}.$$

Wir werden später sehen, daß die Kausalitätseigenschaft bei der Prognose eine große Rolle spielt. Für $p = 1$ erhalten wir aus Beispiel 4.2, daß ein AR(1)-Prozeß genau dann kausal ist, wenn $|\alpha_1| < 1$, wenn also die Nullstelle $1/\alpha_1$ des Polynoms $\alpha(z)$ *außerhalb* des Einheitskreises liegt. Dies läßt sich auch für allgemeines p zeigen:

Satz 4.2 (Kausalitätbedingung)**.**
Ein AR(p)-Prozeß ist genau dann kausal, wenn alle Nullstellen des Polynoms $\alpha(z)$ außerhalb des Einheitskreises liegen.

Die Frage nach der Existenz einer (möglicherweise kausalen) Lösung der Differenzengleichung $\alpha(L)\xi_t = \beta(L)\epsilon_t$ können wir nun leicht klären, wenn wir der Einfachheit halber annehmen, daß $\alpha(z)$ und $\beta(z)$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen: die Bedingungen bleiben dann so wie beim rein autoregressiven Prozeß, i.e., keine Nullstellen von $\alpha(z)$ am Einheitskreis als Stabilitätsbedingung und alle Nullstellen außerhalb des Einheitskreises als Kausalitätsbedingung.

Im stabilen Fall kann man die Lösung der Differenzengleichung $\alpha(L)\xi_t = \beta(L)\epsilon_t$ wie folgt erhalten: man entwickelt die rationale Funktion $\phi(z) = \beta(z)/\alpha(z)$ in eine Laurentreihe $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j z^j$, die in einem Kreisring um den Einheitskreis konvergiert (was aufgrund der Stabilitätsbedingung möglich ist); dann gilt

$$\xi_t = \phi(L)\epsilon_t = \sum\nolimits_{j\in\mathbb{Z}} \phi_j \epsilon_{t-j}.$$

(Formal ist das klar wegen $\alpha(L)\xi_t = \alpha(L)\phi(L)\epsilon_t = \beta(L)\epsilon_t$, nur muß Sorge getragen werden, daß die entsprechenden Reihen auch konvergieren.) Im kausalen Fall ist die rationale Funktion $\phi(z)$ analytisch in einem Kreis um den Ursprung mit Radius größer als eins, und die Laurentreihe wird zur Taylorreihe, enthält also nur nichtnegative Potenzen von z.

Mit Hilfe dieser Lösungsformel können wir nun auch Mittelwerts- und Kovarianzfunktion eines ARMA-Prozesses „berechnen“. Für die Mittelwertsfunktion erhält man

$$\mathbb{E}\,\xi_t = \mathbb{E} \sum\nolimits_{j\in\mathbb{Z}} \phi_j \epsilon_{t-j} = \sum\nolimits_{j\in\mathbb{Z}} \phi_j \,\mathbb{E}\,\epsilon_{t-j} = 0,$$

für die Kovarianzfunktion

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\xi_{t+h}, \xi_t) &= \mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{i\in\mathbb{Z}} \phi_i \epsilon_{t+h-i} \sum\nolimits_{j\in\mathbb{Z}} \phi_j \epsilon_{t-j}\right) \\
&= \sum\nolimits_{i,j\in\mathbb{Z}} \phi_i \phi_j \, \mathbb{E}\, \epsilon_{t+h-i} \epsilon_{t-j} \\
&= \sum\nolimits_{i,j\in\mathbb{Z}} \phi_i \phi_j \sigma^2 \delta_{i,j+h} \\
&= \sigma^2 \sum\nolimits_{j\in\mathbb{Z}} \phi_j \phi_{j+h}.
\end{aligned}
$$

Definition 4.3 (Invertierbarkeit).
Ein ARMA(p, q)-Prozeß heißt *invertierbar*, wenn es eine im Quadrat summierbare Folge $(\psi_0, \psi_1, \ldots)$ von Konstanten gibt, sodaß $\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \xi_{t-j}$ für alle $t \in \mathbb{Z}$.

Satz 4.3 (Invertierbarkeitsbedingung).
Ein MA(q)-Prozeß ist genau dann invertierbar, wenn alle Nullstellen des Polynoms $\beta(z)$ außerhalb des Einheitskreises liegen.

Bemerkung. Ähnlich zu den Überlegungen zur Kausalität zeigt man leicht: haben $\alpha(z)$ und $\beta(z)$ keine gemeinsamen Nullstellen, dann ist der ARMA(p, q)-Prozeß $\alpha(L)\xi_t = \beta(L)\epsilon_t$ genau dann invertierbar, wenn alle Nullstellen von $\beta(z)$ außerhalb des Einheitskreises liegen.

Beispiel 4.3. Wir betrachten den allgemeinen ARMA(1,1)-Prozeß

$$\xi_t - \alpha_1 \xi_{t-1} = \epsilon_t - \beta_1 \epsilon_{t-1}.$$

Für $\alpha_1 \neq \beta_1$ gibt es genau dann eine stationäre Lösung der obigen Gleichung, wenn $|\alpha_1| \neq 1$ (Stabilitätsbedingung); diese Lösung ist genau dann kausal, wenn $|\alpha_1| < 1$, und genau dann invertierbar, wenn $|\beta_1| < 1$.