1 ARIMA-Prozeß

Definition 1 Seien $d, p, q \in \mathbb{N}_0$. ξ_t wird **ARIMA**(p, d, q)-Prozeß genannt, wenn $\eta_t := \Delta^d \xi_t$ ein kausaler ARMA(p, q)-Prozeß ist.

In Polynomschreibweise:

$$\alpha^\star(L)\xi_t := \alpha(L)(I - L)^d \xi_t = \beta(L)\varepsilon_t \tag{1}$$

Da $\alpha^\star(z)$ bei $z = 1$ eine Nullstelle der Ordnung d hat, kann ξ_t nur für $d = 0$, also für einen ARMA(p, q)-Prozeß, stationär sein.

Da jedes Polynom vom Grad $\leq (d - 1)$ durch d-maliges Differenzieren verschwindet, ist (1) auch noch gültig, wenn wir ein Trendpolynom vom Grad $\leq (d - 1)$ zu ξ_t dazu addieren. ARIMA-Prozesse können also auch Zeitreihen mit Trend modellieren.

I in ARIMA steht für „integriert". Es sind auch fraktional integrierte Prozesse möglich, falls $d \notin \mathbb{N}$.

2 ARMAX-Prozeß

Definition 2 Ein Prozeß η_t heißt **ARMAX**-Prozeß, wenn $\eta_t = \gamma(L)\xi_t + \zeta_t$, wobei $\gamma(L) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_i L^i$ und ξ_t und ζ_t ARMA-Prozesse sind.

Alternative Definition:

Definition 3 Ein Modell der Form

$$\delta(L)\eta_t + \alpha(L)\xi_t = \beta(L)\varepsilon_t \tag{2}$$

mit ξ_t ein ARMA-Prozeß und ε_t weißes Rauschen heißt **ARMAX**-Modell.

Beziehung zwischen den Definitionen 2 & 3 (2) kann als

$$\eta_t = -\delta(L)^{-1}\alpha(L)\xi_t + \delta(L)^{-1}\beta(L)\varepsilon_t$$

geschrieben werden. Nun setzt man $\gamma(L) := -\delta(L)^{-1}\alpha(L)$ und $\zeta_t := \delta(L)^{-1}\beta(L)\varepsilon_t$. Wegen $\delta(L)\zeta_t = \beta(L)\varepsilon_t$ ist ζ_t ein ARMA-Prozeß. (Regularitätsvorraussetzungen?)

Interpretation Bei Definition 2 ist η_t die Summe aus einer gefilterten Zeitreihe ξ_t plus einem davon unabhängigen Rauschanteil ζ_t.

Definition 3 bekommt man, wenn man einen multivariaten ARMA-Prozeß ν_t der Form $A(L)\nu_t = B(L)\varepsilon_t$ als

$$\begin{bmatrix} \delta(L) & \alpha_1(L) \\ 0 & \alpha_2(L) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \xi_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1(L) & 0 \\ 0 & \beta_2(L) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

schreibt. Hierbei sind η_t die endogenen und ξ_t die exogenen Variabeln.

3 (G)ARCH-Modelle

(G)ARCH steht für „(Generalized) AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity“.

Definition 4 Sei I_t die verfügbare Information bis zum Zeitpunkt t. Ein Prozeß ξ_t ist ein **ARCH**(q)-Modell, wenn

$$\xi_t = \varepsilon_t$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi_t | I_{t-1}) &= 0 \\ h_t := \mathrm{var}(\xi_t | I_{t-1}) &= \sigma^2 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2. \end{aligned}$$

Definition 5 Ein Prozeß ξ_t ist ein **GARCH**(p,q)-Modell, wenn

$$h_t = \sigma^2 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}$$