

Kapitel 2

Markoffketten in stetiger Zeit

Sei wie üblich X höchstens abzählbar. Ein zufälliger Prozeß $\xi = (\xi(t), t \geq 0)$ heißt *Markoffkette in stetiger Zeit mit Zustandsraum X* , wenn $\xi(t) \in X$ für alle t und ξ die *Markoffeigenschaft* besitzt, i.e. es gilt für alle $0 \leq s_1 < \dots < s_n < s < t$

$$\mathbb{P}(\xi(t) = j | \xi(s_1), \dots, \xi(s_n), \xi(s) = i) = \mathbb{P}(\xi(t) = j | \xi(s) = i).$$

Gilt insbesondere $\mathbb{P}(\xi(s+t) = j | \xi(s) = i) = p_{ij}(t)$ für alle $s \geq 0, t \geq 0$, so heißt ξ eine *Markoffkette in stetiger Zeit mit Zustandsraum X und stationären Übergangswahrscheinlichkeiten*. Die Funktionen $p_{ij}(t), t \geq 0$ heißen dann *Übergangsfunktionen* und die Matrix

$$P(t) = [p_{ij}(t)]_{i,j \in X}, \quad t \geq 0$$

heißt *Matrix der Übergangsfunktionen* oder einfacher *Übergangsfunktion*.

Die Markoffeigenschaft kann analog zum Falle der diskreten Zeit auf mannigfache Art umschreiben. Am anschaulichsten ist wahrscheinlich die folgende Formulierung: bezeichnen $\mathcal{F}_{>t}$ und $\mathcal{F}_{<t}$ die Zukunft bzw. die Vergangenheit von ξ zum Zeitpunkt t , so sind $\mathcal{F}_{>t}$ und $\mathcal{F}_{<t}$ bedingt unabhängig, gegeben $\xi(t)$.

Ganz analog zur Behandlung der Markoffketten in diskreter Zeit zeigt man die Gültigkeit der *Chapman-Kolmogorov Gleichungen*

$$\sum_k p_{ik}(s)p_{kj}(t) = p_{ij}(s+t)$$

beziehungsweise, unter Verwendung der Übergangsfunktion $P(t)$,

$$P(s)P(t) = P(s+t).$$

Zusammenhang mit der Exponentialfunktion

Angenommen, $t \mapsto P(t)$ ist stetig für $t \geq 0$ und an der Stelle $t = 0$ (rechtsseitig) differenzierbar mit Ableitung $A = \dot{P}(0+) = \lim_{h \downarrow 0} (P(h) - I)/h$. Dann gilt, zunächst formal, wegen $P(t+h) = P(t)P(h) = P(h)P(t)$ mit $h \downarrow 0$:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} & = & P(t) \frac{P(h) - I}{h} & = & \frac{P(h) - I}{h} P(t) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dot{P}(t) & = & P(t) A & = & A P(t) \end{array}$$

Vorwärtsgleichung Rückwärtsgleichung

Die (Kolmogorov'sche) Rückwärtsgleichung $\dot{P}(t) = AP(t)$ gilt bereits unter relativ schwachen Bedingungen, beispielsweise wenn ξ konservativ ist, i.e. wenn alle Zeilensummen von A endlich sind. Im folgenden nehmen wir stets an, daß diese Bedingung erfüllt ist. Da dann die Übergangsfunktion die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{P}(t) = AP(t), \quad P(0) = I$$

ist, also die Übergangsfunktion vermittels Lösung einer Differentialgleichung aus A berechenbar ist, nennt man A den *infinitesimalen Erzeuger* von ξ . Formal (und exakt im Falle eines endlichen Zustandsraumes) gilt dann $P(t) = \exp(tA)$.

Ist A diagonalisierbar, so kann man $P(t)$ wie folgt berechnen. Sei Q die Matrix, deren Spalten die Eigenvektoren von A sind, und Λ die Matrix der zugehörigen Eigenwerte, i.e. $AQ = Q\Lambda$. Dann ist

$$P(t) = \exp(tA) = Q \exp(t\Lambda) Q^{-1},$$

wobei $\exp(t\Lambda) = \text{diag}[\exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_n t), \dots]$.

Man überlegt sich leicht, daß die Hauptdiagonalelemente α_{ii} von A nichtpositiv sind, die Nebendiagonalelemente α_{ij} , $j \neq i$ nichtnegativ sind, und daß die Gleichung $\sum_{j \in X} \alpha_{ij} = 0$ gilt. Wir schreiben dann $\alpha_i := -\alpha_{ii} = \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}$.

Interpretation des infinitesimalen Erzeugers

Zunächst gilt

$$\begin{aligned} P_i(\xi(kt/n) = i, 1 \leq k \leq n) &= p_{ii}(t/n)^n \\ &= (1 - \alpha_i t/n + o(t/n))^n \end{aligned}$$

und somit für $n \rightarrow \infty$

$$P_i(\xi \text{ hat } i \text{ bis zum Zeitpunkt } t \text{ noch nicht verlassen}) = e^{-\alpha_i t}.$$

Satz. Bei Start in i ist die Wartezeit bis zum erstmaligen Verlassen des Zustandes i exponentialverteilt mit Parameter α_i .

Ist speziell $\alpha_i = 0$, so nennen wir i *absorbierend*. In diesem Fall wird der Zustand i nicht mehr verlassen.

Eine einfache Interpretation der Nichtdiagonalelemente von A kann man sich wie folgt verschaffen. Sei i nicht absorbierend, i.e. $\alpha_i > 0$, und sei B das Ereignis, daß der Zustand i im Zeitintervall $[0, t]$, und zwar durch einen Sprung in den Zustand j , verlassen wird. Schreiben wir

$$C_{n,k} = \{\xi(s) = i, 0 \leq s \leq (k-1)t/n; \xi(kt/n) = j\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

und

$$B_n = C_{n,1} \cup \dots \cup C_{n,n},$$

so gilt offensichtlich $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ und daher auch $\lim_{n \rightarrow \infty} P_i(B_n) = P_i(B)$. Für festes n sind die $C_{n,k}$ disjunkt mit $P_i(C_{n,k}) = e^{-\alpha_i(k-1)t/n} p_{ij}(t/n)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} P_i(B_n) &= \sum_{k=1}^n P_i(C_{n,k}) \\ &= \sum_{k=1}^n e^{-\alpha_i(k-1)t/n} p_{ij}(t/n) \\ &= p_{ij}(t/n) \frac{1 - e^{-\alpha_i t}}{1 - e^{-\alpha_i t/n}} \\ &\rightarrow \alpha_{ij} \frac{1 - e^{-\alpha_i t}}{\alpha_i}, \end{aligned}$$

also

$$P_i(i \text{ wird bevor } t \text{ durch Sprung nach } j \text{ verlassen}) = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_i} (1 - e^{-\alpha_i t}).$$

Für $t \rightarrow \infty$ folgt

$$P_i(\text{erster Sprung nach } j) = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_i} := r_{ij}.$$

Satz. Sei i nicht absorbierend. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei Start in i der erste Sprung in den Zustand j erfolgt, ist $r_{ij} = \alpha_{ij}/\alpha_i$.

Wir setzen $r_{ii} = 0$ und schreiben $R = [r_{ij}]_{i,j \in X}$. Wegen $\alpha_i = \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}$ gilt dann $\sum_j r_{ij} = 1$, i.e. R ist eine stochastische Matrix (Übergangsmatrix).

Die obigen Überlegungen lassen sich nun ohne Schwierigkeiten auf den zweiten, dritten, ... Sprung ausdehnen. Schreiben wir $\sigma_0 = 0, \sigma_n$ für den Zeitpunkt des n -ten Sprunges von $\xi(t)$ und $\eta_n = \xi(\sigma_n)$ für den Zustand, in dem sich $\xi(t)$ zwischen dem n -ten und $(n+1)$ -ten Sprung befindet, so sehen wir, daß $\eta = (\eta_n)_{n \geq 0}$ eine Markoffkette in diskreter Zeit mit Zustandsraum X und Übergangsmatrix R , die sogenannte „eingebettete Markoffkette“, ist.

Rekurrenz, Transienz & Absorptionswahrscheinlichkeiten

Rekurrenz und Transienz für Markoffketten in stetiger Zeit lassen sich vollständig mit den Kriterien für Markoffketten in diskreter Zeit beschreiben: ein Zustand i ist für $\xi = (\xi(t), t \geq 0)$ dann und nur dann rekurrent, wenn er für die eingebettete Markoffkette η rekurrent ist.

Markoffketten in stetiger Zeit sind immer aperiodisch. Man kann zeigen: eine Übergangsfunktion $p_{ij}(t)$ ist entweder positiv für alle $t > 0$ oder verschwindet identisch.

Sei a ein absorbierender Zustand, τ_a die Zeit bis zur Absorption in a ($\tau_a = \infty$, wenn keine Absorption in a erfolgt), und h_i die Wahrscheinlichkeit, bei Start in i in a absorbiert zu werden. Offensichtlich gilt $P_i(\tau_a \leq t) = p_{ia}(t)$ und $h_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ia}(t)$. Wegen $\dot{p}_{ia}(t) = \sum_j \alpha_{ij} p_{ja}(t)$ folgt somit für $t \rightarrow \infty$, daß $\sum_j \alpha_{ij} h_j = 0$. Der Vektor h der Absorptionswahrscheinlichkeiten in a ist daher die Lösung der Gleichung

$$Ah = 0, \quad h_a = 1, \quad h_b = 0 \quad \text{für alle } b \text{ absorbierend, } b \neq a.$$

Stationäre Verteilungen

Schreiben wir $\mu(t) = [\mathbb{P}(\xi(t) = i)]'_{i \in X}$, so gilt $\mu(t) = P(t)' \mu(0)$. Aus der Vorwärtsgleichung $\dot{P}(t) = P(t)A$ folgt dann $\dot{\mu}(t) = A'P(t)' \mu(0) = A' \mu(t)$. Also ist ein Wahrscheinlichkeitsvektor μ mögliche Grenzverteilung, wenn $A' \mu = \mathbf{0}$ gilt. Solche Vektoren nennt man *stationäre Verteilungen*.

Ist die Startverteilung $\mu(0) = \mu$ eine stationäre Verteilung, so folgt mit Hilfe der Rückwärtsgleichung, daß $\dot{\mu}(t) = \dot{P}(t)' \mu(0) = P(t)' A' \mu = 0$, i.e. daß $\mu(t) = \mu$ für alle t . Da die Übergangswahrscheinlichkeiten stationär sind, ist dann auch der Prozeß $(\xi(t), t \geq 0)$ stationär.

Beispiel 1: Poissonprozeß

Der Poissonprozeß mit Parameter λ ist eine Markoffkette in stetiger Zeit mit Zustandsraum $X = \{0, 1, \dots\}$ und infinitesimalem Erzeuger

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \lambda, & j = i + 1, \\ -\lambda, & j = i, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Man skizziere den Intensitätsgraphen.) In diesem Fall sind die konsekutiven Wartezeiten $\rho_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$ identisch exponentialverteilt mit Parameter λ . Sie sind aber auch unabhängig, wie man leicht erkennt. Es gilt

$$\begin{aligned} P_i(\rho_1 \leq s, \rho_2 \leq t) &= \sum_j P_i(\rho_1 \leq s, \eta_1 = j, \rho_2 \leq t) \\ &= \sum_j P_i(\rho_1 \leq s, \eta_1 = j) P_j(\rho_2 \leq t) \\ &= P_i(\rho_1 \leq s) P_{i+1}(\rho_2 \leq t), \end{aligned}$$

analog für den allgemeinen Fall ($n > 2$).

Der Poissonprozeß entsteht also bei Start in i wie folgt: zwischen dem $(j - i)$ -ten und dem $(j - i + 1)$ -ten Sprung befindet sich das Teilchen in j , oder noch einfacher: die Differenz des gegenwärtigen Zustandes zum Anfangszustand ist gleich der Anzahl der Sprünge bis zur Gegenwart. Es folgt $p_{ij}(t) \equiv 0$ für $j < i$ und, für $j \geq i$,

$$P_i(\xi(t) = j) = p_{ij}(t) = \mathbb{P}(\sigma_{j-i} \leq t < \sigma_{j-i+1}).$$

Da $\rho_1, \dots, \rho_n, \dots$ unabhängig exponentialverteilt mit Parameter λ sind, ist σ_n gammaverteilt mit Parametern n und λ und besitzt die Dichte

$$f_{\sigma_n}(s) = \frac{\lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s}}{(n-1)!}, \quad s \geq 0.$$

Somit gilt, wenn wir zur Vereinfachung $n = j - i$ schreiben,

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= \int_0^t \frac{d}{ds} \mathbb{P}(\sigma_n = s, \rho_{n+1} > t - s) ds \\ &= \int_0^t f_{\sigma_n}(s) e^{-\lambda(t-s)} ds \\ &= e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{\lambda^n s^{n-1}}{(n-1)!} ds \\ &= e^{-\lambda t} \lambda^n \frac{s^n}{n!} \Big|_0^t \\ &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

also zusammenfassend

$$p_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, \quad j \geq i.$$

Satz. Bei einem Poissonprozeß mit Parameter λ ist die Anzahl der Sprünge in einem Zeitintervall der Länge t poissonverteilt mit Parameter λt .

Beispiel 2: Yuleprozeß

Der Yuleprozeß mit Parameter λ ist eine Markoffkette in stetiger Zeit mit Zustandsraum $X = \{0, 1, \dots\}$ und infinitesimalem Erzeuger

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} i\lambda, & j = i + 1, \\ -i\lambda, & j = i, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Man skizziere den Intensitätsgraphen.)

Der Yuleprozeß wird auch (linearer) Geburtsprozeß genannt. Interpretiert man nämlich die jeweiligen Sprünge als „Geburten“, so erkennt man, daß die Geburtsintensität, wenn i Teilchen vorhanden sind, genau i mal so groß ist wie die Geburtsintensität in dem Fall, wo genau ein Teilchen vorhanden ist.

Die Übergangsfunktionen lassen sich leicht aus der Vorwärtsgleichung bestimmen. Zunächst gilt, wie wir bereits wissen,

$$p_{ii}(t) = P_i(\text{kein Ereignis in } [0, t]) = e^{-i\lambda t}$$

und die Vorwärtsgleichung liefert für $j > i$

$$\dot{p}_{i,j}(t) = -j\lambda p_{i,j}(t) + (j-1)\lambda p_{i,j-1}(t).$$

Durch Multiplikation mit $e^{j\lambda t}$ erhalten wir

$$\frac{d}{dt} (e^{j\lambda t} p_{i,j}(t)) = (j-1)\lambda e^{j\lambda t} p_{i,j-1}(t)$$

und daher

$$p_{i,j}(t) = (j-1)\lambda e^{-j\lambda t} \int_0^t e^{j\lambda s} p_{i,j-1}(s) ds$$

Somit kann man die Übergangsfunktionen rekursiv durch einfache Integrationen berechnen. Für $j = i + 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(t) &= i\lambda e^{-(i+1)\lambda t} \int_0^t e^{(i+1)\lambda s} e^{-i\lambda s} ds \\ &= i\lambda e^{-(i+1)\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} ds \\ &= i e^{-i\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}), \end{aligned}$$